Décroissance exponentielle des solutions de l'équation KdV

Carlos LEÓN

Laboratoire de Mathématiques et Applications (LMA)
UMR 7348 du CNRS
Université de Poitiers

7 juillet 2021

La Rochelle
Rencontre du GDR-GDM

Notre point de départ est le *problème de Cauchy* associé à l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + u\,\partial_x u = 0\,, & u = u(x,t), \quad x,t \in \mathbb{R}\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Notre point de départ est le *problème de Cauchy* associé à l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + u\, \partial_x u = 0\,, \qquad u = u(x,t), \quad x,t \in \mathbb{R}\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

L'équation KdV décrit la propagation d'ondes longues unidimensionnelles de faible amplitude dans un milieu peu profond.

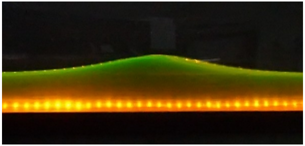


Figure – *Un soliton hydrodynamique*. Sous licence, via Wikimedia Commons.

On a l'intention d'étudier une propriété de *décroissance de type exponentiel* (spatial) qu'une solution u de ce problème peut présenter.

On a l'intention d'étudier une propriété de *décroissance de type exponentiel* (spatial) qu'une solution u de ce problème peut présenter.

Ce phénomène de décroissance est lié aux propriétés de *continuation unique des solutions* du problème.

On a l'intention d'étudier une propriété de *décroissance de type exponentiel* (spatial) qu'une solution u de ce problème peut présenter.

Ce phénomène de décroissance est lié aux propriétés de *continuation unique des solutions* du problème.

Escauriaza, Kenig, Ponce & Vega : Continuation unique

Si la différence de deux solutions de l'équation KdV décroît pour $x > 0$, comme

$$e^{-a\,x^{3/2}},$$

en deux moments différents, pour tout $a > 0$, alors ces deux solutions sont la même.

On a l'intention d'étudier une propriété de *décroissance de type exponentiel* (spatial) qu'une solution u de ce problème peut présenter.

Ce phénomène de décroissance est lié aux propriétés de *continuation unique des solutions* du problème.

Escauriaza, Kenig, Ponce & Vega : Continuation unique

Si la différence de deux solutions de l'équation KdV décroît pour $x > 0$, comme

$$e^{-a\,x^{3/2}},$$

en deux moments différents, pour tout $a > 0$, alors ces deux solutions sont la même.

En particulier, si en $t = 0$ une solution u présente ce comportement, alors u **ne peut pas avoir la même décroissance** à un autre moment !

L'exposant d'ordre $x^{3/2}$ est lié à la décroissance de la *solution fondamentale* de notre problème de Cauchy.

L'exposant d'ordre $x^{3/2}$ est lié à la décroissance de la *solution fondamentale* de notre problème de Cauchy.

En effet, la solution du problème linéaire associé,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0\,,$$

est donnée par $S_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3t}}\, A\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{3t}}\right)$, où A est la *fonction d'Airy*.

L'exposant d'ordre $x^{3/2}$ est lié à la décroissance de la *solution fondamentale* de notre problème de Cauchy.

En effet, la solution du problème linéaire associé,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0\,,$$

est donnée par $S_t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}}\, A\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3t}}\right)$, où A est la *fonction d'Airy*.

Fait : Pour $x \gg 0\,,\ A(x) \sim x^{-1/4} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$, d'où

$$S_t(x) \sim t^{-1/4} x^{-1/4}\, \mathrm{e}^{-\frac{2}{3\sqrt{3t}}x^{3/2}}\,.$$

L'exposant d'ordre $x^{3/2}$ est lié à la décroissance de la *solution fondamentale* de notre problème de Cauchy.

En effet, la solution du problème linéaire associé,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0\,,$$

est donnée par $S_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3t}}\, A\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{3t}}\right)$, où A est la *fonction d'Airy.*

Fait : Pour $x \gg 0\,,\; A(x) \sim x^{-1/4} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3} x^{3/2}}$, d'où

$$S_t(x) \sim t^{-1/4} x^{-1/4}\, \mathrm{e}^{-\frac{2}{3\sqrt{3t}} x^{3/2}}\,.$$

Conséquence : Les solutions du *problème linéaire* montrent une décroissance exponentielle d'ordre $x^{3/2}$: pour $x > 0$ et $t > -t_0$, on a que

$$u(t)(x) \sim x^{-1/4} (t_0 + t)^{-1/4}\, \mathrm{e}^{-\frac{a_0}{\sqrt{1+\frac{27}{4}a_0^2 t}} x^{3/2}}\,.$$

Question : Soit u_0 (valeur initiale), tel que $\mathrm{e}^{a_0 x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. La solution u du problème de Cauchy préserve-t-elle une décroissance exponentielle d'ordre $x_+^{3/2}$ au fur et à mesure que le temps évolue ?

Question : Soit u_0 (valeur initiale), tel que $e^{a_0 x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. La solution u du problème de Cauchy préserve-t-elle une décroissance exponentielle d'ordre $x_+^{3/2}$ au fur et à mesure que le temps évolue ?

Isaza, Linares & Ponce

Si $e^{a_0 x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, alors la solution $u(t)$ sur $[0,T]$ est telle que

$$\left\| e^{a(t)\, x_+^{3/2}} u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\,,$$

où $C = C(a_0, T, \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|e^x u_0\|_{L^2(\mathbb{R})})$ et $a(t) = \dfrac{a_0}{\sqrt{1+27\,a_0^2 t}}\,.$

Question : Soit u_0 (valeur initiale), tel que $e^{a_0 x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. La solution u du problème de Cauchy préserve-t-elle une décroissance exponentielle d'ordre $x_+^{3/2}$ au fur et à mesure que le temps évolue ?

Isaza, Linares & Ponce

Si $e^{a_0 x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, alors la solution $u(t)$ sur $[0,T]$ est telle que

$$\left\| e^{a(t)\, x_+^{3/2}} u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\,,$$

où $C = C(a_0, T, \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|e^x u_0\|_{L^2(\mathbb{R})})$ et $a(t) = \dfrac{a_0}{\sqrt{1 + 27\, a_0^2 t}}$.

Objectif : Obtenir une fonction *optimale* $a(t)$, telle que $a(0) = a_0$ et vérifiant l'affirmation ci-dessus.

Comme premier résultat important :

Comme premier résultat important :

Théorème I (Isaza & León)

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ *et* $T > 0$. *Soit* $u \in C\left([0,T]; L^2(\mathbb{R})\right)$ *la solution du problème de Cauchy, avec* $u(0) = u_0$. *Supposons que pour* $a_0 > 0$, $e^{a_0\, x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. *Alors il existe une constante* C *telle que pour tout* $t \in [0,T]$,

$$\left\| e^{a(t)\, x_+^{3/2}} u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \left\| e^{a_0\, x_+^{3/2}} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \textit{où} \ \ a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{27}{4}\, a_0^2 t}}.$$

Comme premier résultat important :

Théorème I (Isaza & León)

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ *et* $T > 0$. *Soit* $u \in C\left([0,T]; L^2(\mathbb{R})\right)$ *la solution du problème de Cauchy, avec* $u(0) = u_0$. *Supposons que pour* $a_0 > 0$, $e^{a_0\, x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. *Alors il existe une constante* C *telle que pour tout* $t \in [0,T]$,

$$\left\| e^{a(t)\, x_+^{3/2}} u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \left\| e^{a_0\, x_+^{3/2}} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \text{où } \ a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{27}{4}\, a_0^2 t}}.$$

Remarque : En effet, la solution du problème de Cauchy associé à l'équation KdV, dont la valeur initiale décroît comme précisé avant, montre une décroissance exponentielle qui se *dégrade* avec le temps.

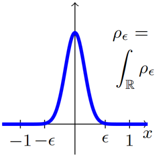
Croquis de la preuve

Croquis de la preuve

On régularise la valeur initiale :

Pour $0 < \epsilon < 1$, on définit

$$u_0^\epsilon := \rho_\epsilon * u_0(\cdot + \epsilon)\,.$$



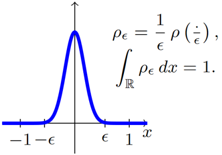
$$\rho_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\,\rho\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right),$$
$$\int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon\, dx = 1.$$

Croquis de la preuve

On régularise la valeur initiale :

Pour $0 < \epsilon < 1$, on définit

$$u_0^\epsilon := \rho_\epsilon * u_0(\cdot + \epsilon)\,.$$



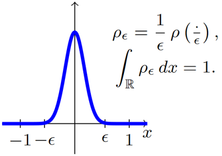
La preuve se base sur des *estimations a priori* de $u \equiv u_m$, la solution du problème avec condition initiale $u_0^{1/m}$.

Croquis de la preuve

On régularise la valeur initiale :

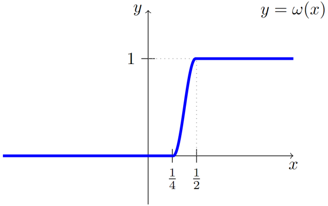
Pour $0 < \epsilon < 1$, on définit

$$u_0^\epsilon := \rho_\epsilon * u_0(\cdot + \epsilon)\,.$$



La preuve se base sur des *estimations a priori* de $u \equiv u_m$, la solution du problème avec condition initiale $u_0^{1/m}$.

Pour cela, on prend une fonction de troncature $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$ comme suit :



Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction ψ_n ,

$$\psi(x,t) \equiv \psi_n(x,t) := \begin{cases} \omega(x)\, a(t)\, x^{3/2}, & \text{si } x \leq n\,, \\ \log(P_n(x,t)), & \text{si } x > n\,, \end{cases}$$

où $P_n(x,t)$ est un polynôme de degré 2, qui vérifie une certaine propriété.

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction ψ_n ,

$$\psi(x,t) \equiv \psi_n(x,t) := \begin{cases} \omega(x)\, a(t)\, x^{3/2}, & \text{si } x \leq n\,, \\ \log(P_n(x,t)), & \text{si } x > n\,, \end{cases}$$

où $P_n(x,t)$ est un polynôme de degré 2, qui vérifie une certaine propriété.

On définit donc $f \equiv f_{m,n} := u_m\, \mathrm{e}^{\psi_n} \equiv u\, \mathrm{e}^{\psi}$. Ensuite,

on substitue $u = \mathrm{e}^{-\psi} f$ dans l'équation KdV,

on multiplie par f,

puis on intègre par parties sur $\mathbb{R}$ par rapport à la variable x.

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction ψ_n ,

$$\psi(x,t) \equiv \psi_n(x,t) := \begin{cases} \omega(x)\, a(t)\, x^{3/2}, & \text{si } x \leq n\,, \\ \log(P_n(x,t)), & \text{si } x > n\,, \end{cases}$$

où $P_n(x,t)$ est un polynôme de degré 2, qui vérifie une certaine propriété.

On définit donc $f \equiv f_{m,n} := u_m\, \mathrm{e}^{\psi_n} \equiv u\, \mathrm{e}^{\psi}$. Ensuite,

on substitue $u = \mathrm{e}^{-\psi} f$ dans l'équation KdV,

on multiplie par f,

puis on intègre par parties sur $\mathbb{R}$ par rapport à la variable x.

Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f^2 + 3\int \psi_x(\partial_x f)^2 - \int (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 - \frac{2}{3}\int \mathrm{e}^{-\psi}\psi_x f^3 = 0\,.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f^2 \leq \int (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 + \frac{2}{3}\int \mathrm{e}^{-\psi}\psi_x f^3 \, . \quad \clubsuit$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f^2 \leq \int (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 + \frac{2}{3}\int \mathrm{e}^{-\psi}\psi_x f^3 \,. \quad \clubsuit$$

Afin de continuer les estimations, on cherche appliquer le *lemme de Grönwall* à l'inégalité ci-dessus.

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f^2 \leq \int (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 + \frac{2}{3}\int \mathrm{e}^{-\psi}\psi_x f^3 \,. \quad \clubsuit$$

Afin de continuer les estimations, on cherche appliquer le *lemme de Grönwall* à l'inégalité ci-dessus.

Tout d'abord, en analysant l'expression $\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}$ pour $x \in [1, n]$, on trouve :

$$\left(a' + \frac{27}{8}a^3\right) x^{3/2} - \frac{3}{8} a\, x^{-3/2} \,.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f^2 \leq \int (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 + \frac{2}{3}\int \mathrm{e}^{-\psi}\psi_x f^3 \,. \quad \clubsuit$$

Afin de continuer les estimations, on cherche appliquer le *lemme de Grönwall* à l'inégalité ci-dessus.

Tout d'abord, en analysant l'expression $\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}$ pour $x \in [1, n]$, on trouve :

$$\left(a' + \frac{27}{8}a^3\right) x^{3/2} - \frac{3}{8} a\, x^{-3/2} \,.$$

Ceci nous amène à imposer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a' + \frac{27}{8}a^3 = 0\,, \\ a(0) = a_0\,, \end{cases}$$

dont la solution est donnée par

$$\boxed{a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{27}{4}\, a_0^2 t}}\,.}$$

Sur $[1, n]$, le membre de droite de ♣ est borné par

$$a_0 \|x_+^{1/2} u(t)\|_{L^\infty([\,0,\infty\,[)} \int_{\mathbb{R}} f^2 \,.$$

Sur $[1, n]$, le membre de droite de ♣ est borné par

$$a_0 \|x_+^{1/2} u(t)\|_{L^\infty([\,0,\infty\,[)} \int_{\mathbb{R}} f^2 \,.$$

Sur $]\,n, \infty\,[$, on utilise le polynôme $P \equiv P_n$. Pour cela, on doit aussi calculer P_t, P_x et P_{xx}. Ceux-ci sont des *perturbations* de polynômes en la variable $r = a\, n^{1/2}(x - n)$.

Sur $[1, n]$, le membre de droite de ♣ est borné par

$$a_0 \|x_+^{1/2} u(t)\|_{L^\infty([\,0,\infty\,[)} \int_{\mathbb{R}} f^2 \,.$$

Sur $]\,n, \infty\,[$, on utilise le polynôme $P \equiv P_n$. Pour cela, on doit aussi calculer P_t, P_x et P_{xx}. Ceux-ci sont des *perturbations* de polynômes en la variable $r = a\, n^{1/2}(x - n)$.

En ces termes, on peut montrer que, pour $x > n$ et n assez grand,

$$\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx} = \frac{1}{P^3}\,\left[P^2 P_t + 3P_x^3 - 3PP_xP_{xx}\right] < 0\,.$$

Sur $[1,n]$, le membre de droite de ♣ est borné par

$$a_0 \|x_+^{1/2} u(t)\|_{L^\infty([\,0,\infty\,[)} \int_{\mathbb{R}} f^2 \,.$$

Sur $]\,n,\infty\,[$, on utilise le polynôme $P \equiv P_n$. Pour cela, on doit aussi calculer P_t, P_x et P_{xx}. Ceux-ci sont des *perturbations* de polynômes en la variable $r = a\,n^{1/2}(x-n)$.

En ces termes, on peut montrer que, pour $x > n$ et n assez grand,

$$\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx} = \frac{1}{P^3}\,\left[P^2 P_t + 3P_x^3 - 3PP_xP_{xx}\right] < 0\,.$$

De plus, $\left|\frac{2}{3}\int_n^\infty \mathrm{e}^{-\psi}\psi_x f^3\right| \le (1+a_0)\|x_+^{1/2}u(t)\|_{L^\infty([\,0,\infty\,[)} \int_{\mathbb{R}} f^2\,,$
qui donne donc une borne pour le membre de droite de ♣, sur $]\,n,\infty\,[$.

De ce qui précède et d'une des *inégalités de Sobolev*, il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{e}^{2\psi_n}\, u_m(t)^2\, \mathrm{d}x \leq \beta_m(t) \int \mathrm{e}^{2\psi_n}\, u_m(t)^2\, \mathrm{d}x\,,$$

où $\beta_m(t) = C(1+a_0^3)\big(1 + \|\mathrm{e}^x u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\mathrm{e}^x \partial_x u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\big)$.

De ce qui précède et d'une des *inégalités de Sobolev*, il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{e}^{2\psi_n}\, u_m(t)^2\,\mathrm{d}x \leq \beta_m(t)\int \mathrm{e}^{2\psi_n}\, u_m(t)^2\,\mathrm{d}x\,,$$

où $\beta_m(t) = C(1+a_0^3)\left(1+\|\mathrm{e}^x u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|\mathrm{e}^x\partial_x u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)$.

En conséquence, par le lemme de Grönwall,

$$\int \mathrm{e}^{2\psi_n(x,t)}\, u_m(t)^2\,\mathrm{d}x \leq C\int \mathrm{e}^{2\psi_n(x,0)}\, u_m(0)^2\,\mathrm{d}x\,.$$

De ce qui précède et d'une des *inégalités de Sobolev*, il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{e}^{2\psi_n}\, u_m(t)^2\,\mathrm{d}x \leq \beta_m(t)\int \mathrm{e}^{2\psi_n}\, u_m(t)^2\,\mathrm{d}x\,,$$

où $\beta_m(t) = C(1+a_0^3)\left(1 + \|\mathrm{e}^x u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\mathrm{e}^x \partial_x u_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right).$

En conséquence, par le lemme de Grönwall,

$$\int \mathrm{e}^{2\psi_n(x,t)}\, u_m(t)^2\,\mathrm{d}x \leq C\int \mathrm{e}^{2\psi_n(x,0)}\, u_m(0)^2\,\mathrm{d}x\,.$$

En appliquant deux fois le *lemme de Fatou*, nous pouvons finalement conclure que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{a(t)\,x_+^{3/2}} u(t)\right)^2 \mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{a_0\,x_+^{3/2}} u_0\right)^2 \mathrm{d}x\,.}$$

Corollaire

Si u est une solution du problème de Cauchy linéaire associé à l'équation KdV, telle que $\mathrm{e}^{a_0 x_+^{3/2}} u(0) \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $t \in [0,T]$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{a(t)\, x_+^{3/2}} u(t) \right)^2 \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{a_0\, x_+^{3/2}} u_0 \right)^2 \mathrm{d}x \,,$$

où $C = C(a_0, T)$.

Le deuxième résultat important montre qu'une solution $u(t)$ du problème de Cauchy associé à l'équation KdV **ne peut pas décroître plus vite que ne l'indique la fonction** $a(t)$.

Le deuxième résultat important montre qu'une solution $u(t)$ du problème de Cauchy associé à l'équation KdV **ne peut pas décroître plus vite que ne l'indique la fonction** $a(t)$.

Posons $g(\tau)(b) := \dfrac{b}{\sqrt{1 + \frac{27}{4}b^2\tau}}$.

Le deuxième résultat important montre qu'une solution $u(t)$ du problème de Cauchy associé à l'équation KdV **ne peut pas décroître plus vite que ne l'indique la fonction** $a(t)$.

Posons $g(\tau)(b) := \dfrac{b}{\sqrt{1+\frac{27}{4}b^2\tau}}$.

Théorème II (Isaza & León)

Pour $T>0$, $a_0>0$ *et* $0<\epsilon<\frac{1}{3}a_0$, *il existe une constante* $C>0$, *et* $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *avec* $e^{a_0\, x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, *tels que sur* $[0,T]$ *la solution* u *du problème de Cauchy associé à l'équation KdV vérifie :*

$$C\, e^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} \leq u(t)(x)\,, \qquad \textit{pour tout } x>0\,.$$

Le deuxième résultat important montre qu'une solution $u(t)$ du problème de Cauchy associé à l'équation KdV **ne peut pas décroître plus vite que ne l'indique la fonction** $a(t)$.

Posons $g(\tau)(b) := \dfrac{b}{\sqrt{1+\frac{27}{4}b^2\tau}}$.

Théorème II (Isaza & León)

Pour $T>0$, $a_0>0$ *et* $0<\epsilon<\frac{1}{3}a_0$, *il existe une constante* $C>0$, *et* $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *avec* $e^{a_0\, x_+^{3/2}} u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, *tels que sur* $[0,T]$ *la solution* u *du problème de Cauchy associé à l'équation KdV vérifie :*

$$C\, e^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} \leq u(t)(x)\,, \qquad \textit{pour tout } x>0\,.$$

En particulier, pour tout $t\in[0,T]$, $\mathrm{e}^{g(t)(a_0+\epsilon)x_+^{3/2}} u(t) \notin L^2(\mathbb{R})\,.$

Idée de la preuve

Idée de la preuve

On se sert de la proposition suivante :

Proposition

Pour $T > 0$, $a_0 \geq 0$ et $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, soit u la solution de notre problème de Cauchy sur $[0, T]$. Pour $j = 1, 2$, si $\mathrm{e}^{a_0 x_+^{3/2}} \partial_x^j u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, alors il existe une constante C telle que

$$\left\| \mathrm{e}^{a(t) x_+^{3/2}} \partial_x^j u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \mathrm{e}^{MT} \left\| \mathrm{e}^{a_0 x_+^{3/2}} \partial_x^j u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R})} ,$$

où $M = C(1 + a_0^3) \sup_{t \in [0,T]} \left[1 + \|(1 + x_+^{1/2}) u(t)\|_{L^\infty([0,\infty[)} + \|\partial_x u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right]$.

On prend une fonction positive $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]-1,1[$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Pour $0 < \delta < \frac{1}{2}$, soit $\varphi_\delta := \frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)$.

On prend une fonction positive $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]-1,1[$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Pour $0 < \delta < \frac{1}{2}$, soit $\varphi_\delta := \frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)$.

Pour $\alpha > 0$ petit et $t_0 = \frac{4}{27}(a_0 + \epsilon/3)^{-2}$, on considère le problème de Cauchy avec condition initiale

$$u_0 \equiv u_{0,\alpha} := S(t_0)(\alpha\, \varphi_\delta)\,.$$

On prend une fonction positive $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$, telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset]-1,1[$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Pour $0 < \delta < \frac{1}{2}$, soit $\varphi_\delta := \frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)$.

Pour $\alpha > 0$ petit et $t_0 = \frac{4}{27}(a_0 + \epsilon/3)^{-2}$, on considère le problème de Cauchy avec condition initiale

$$u_0 \equiv u_{0,\alpha} := S(t_0)(\alpha\,\varphi_\delta)\,.$$

Il *existe* une solution *unique* $u_\alpha \in C([0,T];\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ du problème de Cauchy en question, qui vérifie la *formule de Duhamel* en tout point :

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)(u(\tau)\partial_x u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,, \quad \text{pour tout } t \in [0,T]\,.$$

On montre que pour $x > 1$ et $t \in [0, T]$:

- Si $\delta > 0$ est assez petit, alors

$$C_1 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} \leq [S(t)u_0](x) \leq C_2 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon/4)x^{3/2}} .$$

On montre que pour $x > 1$ et $t \in [0, T]$:

- Si $\delta > 0$ est assez petit, alors

$$C_1 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} \leq [S(t)u_0](x) \leq C_2 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon/4)x^{3/2}} .$$

- Notons $F(t)$ l'intégrale dans la formule de Duhamel. Alors,

$$F(t)(x) \leq C_3 \alpha^2 \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} .$$

On montre que pour $x > 1$ et $t \in [0, T]$:

- Si $\delta > 0$ est assez petit, alors

$$C_1 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} \leq [S(t)u_0](x) \leq C_2 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon/4)x^{3/2}} .$$

- Notons $F(t)$ l'intégrale dans la formule de Duhamel. Alors,

$$F(t)(x) \leq C_3 \alpha^2 \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} .$$

En conséquence, pour $x > 0$,

$$u(t)(x) \geq C_1 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} - C_3 \alpha^2 \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} .$$

On montre que pour $x > 1$ et $t \in [0, T]$:

- Si $\delta > 0$ est assez petit, alors

$$C_1 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} \leq \left[S(t)u_0\right](x) \leq C_2 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon/4)x^{3/2}} .$$

- Notons $F(t)$ l'intégrale dans la formule de Duhamel. Alors,

$$F(t)(x) \leq C_3 \alpha^2 \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} .$$

En conséquence, pour $x > 0$,

$$u(t)(x) \geq C_1 \alpha \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} - C_3 \alpha^2 \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} .$$

En prenant $\alpha = C_1/2C_2$, on peut enfin conclure que pour $t \in [0, T]$ et $x > 0$,

$$\boxed{u(t)(x) \geq \frac{C_1^2}{4\,C_2} \, \mathrm{e}^{-g(t)(a_0+\epsilon)x^{3/2}} .}$$

Travail publié

P. Isaza, C. León *On optimal exponential decay properties of solutions to the Korteweg–de Vries Equation.*
Journal of Differential Equations, Volume 263, Issue 9, 5 November 2017, Pages 5189-5215.

Merci pour votre attention !